

Problemas de Mecánica para Olimpiada

Mechanical problems for the Olympics

—

Idrish Huet Hernández
idrish.huet@gmail.com

FACULTAD DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
CHIAPAS, MÉXICO



Para citar este artículo:

Huet Hernández, I. (2021). Problemas de Mecánica para Olimpiada. *Espacio I+D: Innovación más Desarrollo*, 10(28). <https://doi.org/10.31644/IMASD.28.2021.a09>

Estas notas contienen una colección breve de problemas de mecánica clásica newtoniana pensados para el entrenamiento en Olimpiadas de Física de la selección nacional mexicana de 2020 que representó a México en olimpiadas internacionales, sumándose así a colecciones similares que ya existen. Algunos problemas fueron recopilados de fuentes clásicas como problemarios u otras olimpiadas y son bien conocidos, otros los he modificado o inventado para formar una colección que incluya problemas originales en el espíritu de la (hoy extinta) Editorial Mir y el estilo de problemas de Olimpiada de Física de la “vieja escuela”. Las respuestas a los problemas se dan al final del texto con diferentes grados de detalle en la resolución, mientras que en algunos casos se dan soluciones completas en otros se muestra únicamente la respuesta. Esto es intencional y tiene como propósito incentivar al lector a encontrar soluciones propias y originales a los problemas propuestos que se presentan así como un reto en el proceso de aprendizaje. Siguiendo la tradición de los problemas de olimpiadas se han propuesto problemas elementales, pero no sencillos. Esta breve colección de problemas también podría ser de utilidad como material complementario en cursos de mecánica clásica en el nivel superior.

Quiero agradecer a Dalí Pinto y Jairo Villalobos, estudiantes de la licenciatura en Física de la Universidad Autónoma de Chiapas, por ayudarme a elaborar las figuras y diagramas, así como por interminables discusiones de problemas de física y matemáticas. Aunque el manuscrito ha sido revisado en varias ocasiones cualquier error que subsista en el mismo es responsabilidad mía, y por esto apelo a los lectores que si encontraran errores me lo hicieran saber al correo idrish.huet@gmail.com a fin de que pudieran corregirse en una versión posterior.

Espero que estos problemas sean interesantes para los estudiantes de olimpiadas y tan interesantes y útiles en esta etapa de su aprendizaje de la física, como en su momento otras colecciones similares de problemas lo fueron para mí.

Idrish Huet Hernández
Puerto Vallarta, Jalisco, 30 de Abril de 2020

PROBLEMAS DE MECÁNICA CLÁSICA

1. Hay cinco hormigas sobre los vértices de un pentágono regular de lado a , cada una se mueve con velocidad u siguiendo siempre a su vecina a la derecha (Fig. 1). Determina el tiempo τ que tardarán en encontrarse.

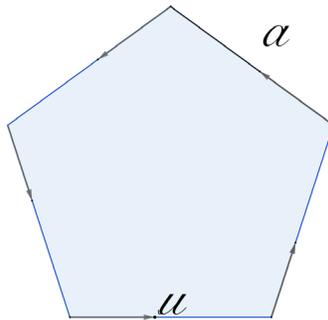


Figura 1

2. Una esfera sólida y homogénea de radio R cae por su propio peso por una escalera de escalones cuadrados de lado $a \ll R$, la esfera nunca pierde contacto con la escalera (Figura 2). Calcula la velocidad terminal del centro de la esfera v_∞ cuando (a) la esfera no tiene fricción con la escalera (b) la esfera tiene tanta fricción con la escalera que rueda sin deslizar al caer por la escalera.

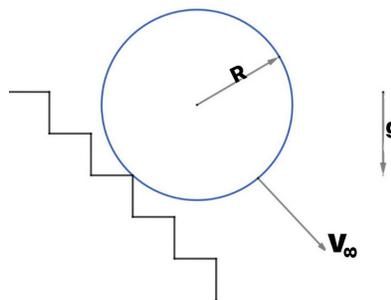


Figura 2

3. Un hilo inextensible de longitud L une a un clavo de radio $r \ll L$ con una masa m . La masa se mueve sobre una mesa horizontal sin fricción donde el clavo está fijo. Inicialmente, con el hilo completamente extendido se le comunica la velocidad v_0 a la masa (Fig. 3). De acuerdo al principio de conservación de momento angular deberíamos tener que $mv_0L = mv\ell$ de manera que $v = v_0L/\ell$ será la velocidad de la masa cuando la longitud del

hilo es ℓ . Sin embargo como el hilo es inextensible no puede realizar trabajo sobre la masa porque la tensión del mismo siempre es perpendicular al movimiento de la masa, por eso la velocidad no puede cambiar. Resuelve esta paradoja y calcula el tiempo t que le toma enrollarse al hilo hasta la longitud $\ell = L/2$.

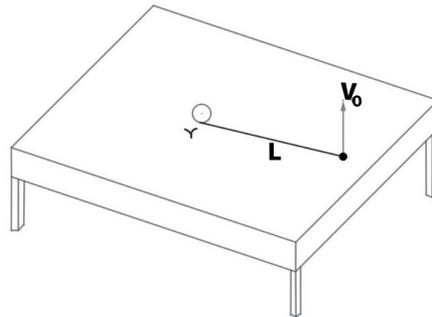


Figura 3

4. Un cubo choca elásticamente contra una pared de manera que su velocidad hace un ángulo α con la misma. El coeficiente de fricción de la pared con el cubo es μ . Encuentra el ángulo β que hace la velocidad del cubo con la pared después del rebote (Fig. 4).

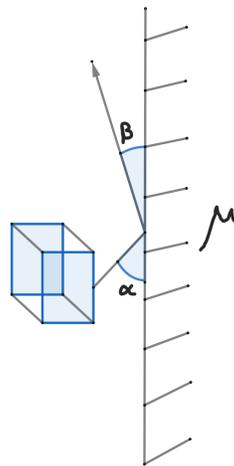


Figura 4

5. Una cáscara esférica delgada de peso W descansa sobre dos patitas de manera que los puntos de contacto están separados por el ángulo α (Fig. 5). (a) Calcula la fuerza de presión en cada patita. Una de las patitas se retira súbitamente, calcula la fuerza de presión en la otra patita un instante

después si (b) Las patitas son tan rugosas que no permiten que la esfera deslice. (c) La esfera desliza sin fricción sobre el material de las patitas.

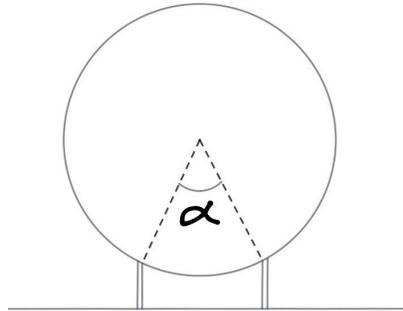


Figura 5

6. Sobre una mesa cuelga verticalmente una cadena uniforme de peso W y longitud L de modo que el extremo inferior apenas roza la superficie. (a) Se deja caer en caída libre la cadena. ¿Cuál es la fuerza máxima que ejerce la cadena sobre la mesa? Ahora considera una situación diferente: La cadena se encuentra descansando sobre la mesa y se comienza a tirar un extremo para levantarla, con la fuerza f al tiempo $t = 0$. (b) ¿Cómo debe depender $f(t)$ del tiempo para que el extremo de la cadena suba con aceleración constante $g/2$? (c) ¿Cómo debería ser $f(t)$ del tiempo para que el extremo subiera con velocidad constante u ? (d) Considerando las tres situaciones anteriores, ¿cuál es la tensión en el punto medio de la cadena cuando $2/3$ de su longitud se encuentran en el aire?

7. Un cascarón esférico hueco de radio R está llena de un líquido de densidad ρ . La esfera y el líquido rotan con velocidad angular ω en un eje vertical que pasa por el centro del cascarón (Fig. 6) (a) Encuentra la presión $P(\theta)$ en la superficie interior del cascarón. (b) Encuentra el valor de la presión máxima P_{max} y el ángulo θ_0 donde ocurre.

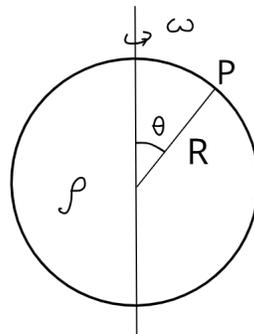


Figura 6

8. Un proyectil se lanza verticalmente hasta que alcanza la altura $3R$ sobre la superficie terrestre, siendo $R \approx 6370 \text{ km}$ el radio terrestre. El proyectil se lanza en una latitud tal que cuando aterriza cae muy cerca de donde fue lanzado. ¿Cuánto tiempo tarda en aterrizar una vez lanzado? La fórmula para el área de un segmento (sombreado) de la elipse (Fig. 7)

$$A(h) = ab \arccos(h/a) - bh\sqrt{a^2 - h^2}/a$$

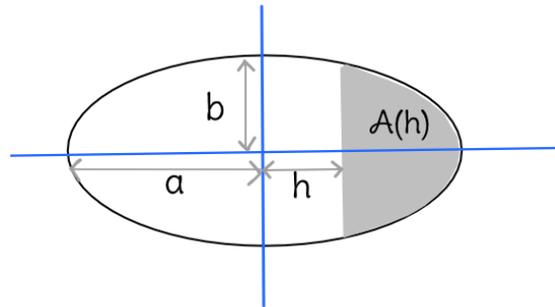


Figura 7

9. Se lanza una canica con velocidad horizontal contra un plano inclinado el cual rebota elásticamente exactamente n veces, el primer choque y el último (n -ésimo) ocurren en el mismo punto (Fig. 8). Después del último choque la velocidad de la canica tiene dirección contraria a su velocidad inicial. Encuentra α , el ángulo de inclinación del plano respecto a la horizontal en términos de n .

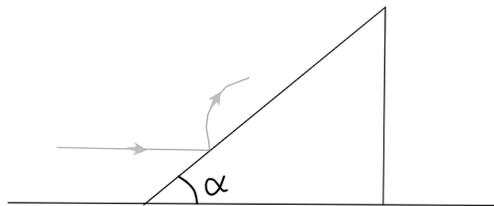


Figura 8

10. Un bloque de masa M puede deslizar sin fricción sobre una mesa. Contra el bloque se apoya una barra homogénea de masa m que tiene la misma altura L del bloque y puede girar libremente mediante un pivote que la une a la mesa. Inicialmente la barra se encuentra vertical y completamente pegada al bloque, luego de un pequeño impulso inicial la barra se desliza lentamente empujando al bloque (Fig. 9). (a) ¿Qué valor debe tener M/m para que el

ángulo ϕ con la vertical sea $\frac{\pi}{3}$ en el momento en que el bloque y la barra se separan? (b) Calcula la velocidad del bloque cuando esto ocurre.

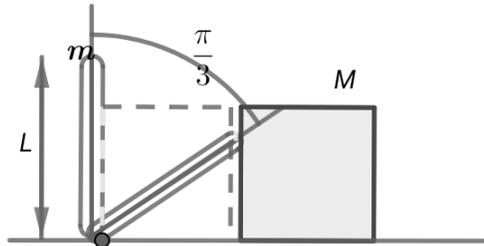


Figura 9

11. Una partícula con carga q y masa m parte del reposo a la distancia z de una placa metálica que puede considerarse infinita. Encuentra el tiempo τ que le toma llegar a la placa.

12. Dos masas m están unidas por un resorte de constante elástica k y descansan sobre una mesa sin fricción. Supongamos que todo el movimiento de las masas ocurre sobre una línea. Una masa M choca elásticamente con una de las masas m (Fig. 10). Encuentra los valores de $\xi = \frac{m}{M}$ para los cuales ocurre un segundo choque entre las masas m y M .



Figura 10

13. Un planeta está en estado líquido y puede considerarse que la densidad de este líquido (magma) es constante e igual ρ . En el proceso de formación del planeta el magma rota uniformemente con velocidad angular ω y aproximadamente adquiere la forma de un elipsoide de revolución con semiejes $a > b$ (Fig. 11). El factor de achatamiento se define como $f = \frac{a-b}{a}$ y cumple $f \ll 1$. Calcula f para la Tierra usando $\rho = 5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y compara el resultado con el valor real $f_T = 3.35 \times 10^{-3}$. Por simplicidad asume que la fuerza gravitacional puede calcularse para este elipsoide concibiendo toda la masa como concentrada en el centro de masas.

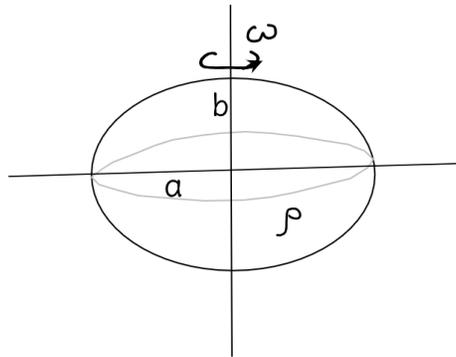


Figura 11

14. Un objeto desliza por una rampa curva suave desde el punto **A** al **B** donde su velocidad hace el ángulo $\pi/4$ con la horizontal, como se muestra en la figura. Inicialmente se le comunica una velocidad horizontal partiendo de **A** y se observa que durante su movimiento la velocidad se mantiene constante. El punto **A** se encuentra a la altura **h** y a la distancia horizontal **ℓ** de **B**. Al llegar a **B** el objeto rebota elásticamente contra el suelo de forma que cae a la distancia **ℓ** de **B** en el punto **C** (Fig. 12). Calcula el coeficiente de fricción μ entre la rampa y el objeto, asume que el objeto no pierde contacto con la rampa entre **A** y **B**. Asume además que el radio medio de curvatura de la rampa es comparable con **h**.

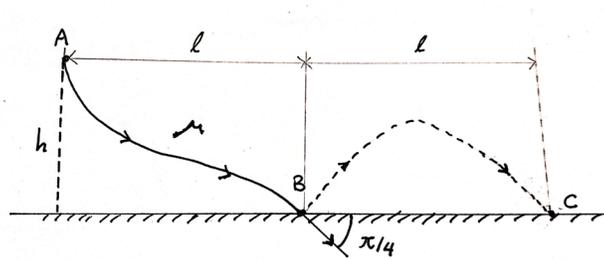


Figura 12

15. ¿A qué distancia del centro hay que golpear horizontalmente una esfera hueca para que comience a rodar sin deslizamiento cuando se encuentra inicialmente en reposo sobre una superficie de hielo muy resbalosa?

16. Se tiene una cadena muy fina de longitud **L** con un número grande **N** de eslabones sobre una mesa sin fricción. La cadena puede considerarse homogénea. Inicialmente la cadena está en reposo con uno de los eslabones colgando verticalmente sobre la esquina de la mesa (Fig. 13). La cadena comienza a deslizarse. Calcula cuánto tiempo τ le toma a la cadena caer por completo de la mesa.

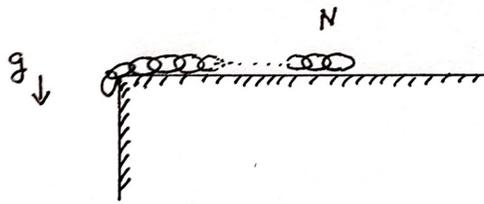


Figura 13

17. Muchas esferitas se dejan resbalar sin fricción por un canal que parte de un punto fijo O pero que puede inclinarse cualquier ángulo respecto a la horizontal de modo que las esferitas caen por gravedad. Si se sueltan muchas esferitas simultáneamente desde O por muchos canales cubriendo muchos ángulos las esferitas yacen siempre sobre una curva que cambia dinámicamente en el tiempo (Fig. 14). (a) Encuentra esta curva cuando las esferitas parten del reposo (b) Encuentra esta curva cuando a cada esferita se le ha dado una velocidad inicial u .

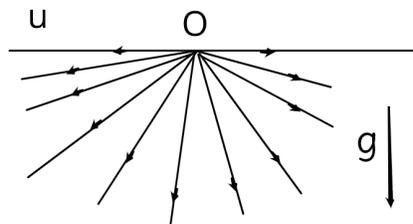


Figura 14

18. Una esferita choca elásticamente contra una pared de tal manera que el ángulo entre su velocidad v y la pared justo antes del choque es α . La pared se mueve hacia a la esferita con velocidad u constante (Fig. 15). (a) Encuentra el valor de u necesario para que el ángulo de rebote de la esferita sea 2α . (b) ¿Para qué valores de α esto es posible?

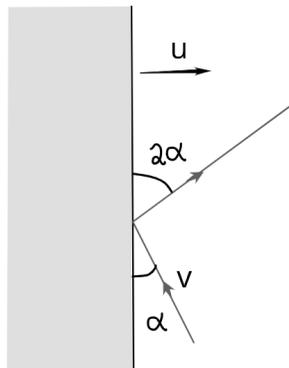


Figura 15

19. Un anillo de radio r y masa m se encuentra acostado sobre una mesa, ver figura. El anillo gira con velocidad angular ω y se desliza sobre la superficie horizontal de la mesa que tiene coeficiente de fricción μ con el anillo. Inicialmente se le comunica la velocidad v_0 al anillo (Fig. 16). (a) Describe la trayectoria del anillo. (b) Explica en qué caso, y por qué, recorre mayor distancia el anillo, cuando gira o cuando no gira.

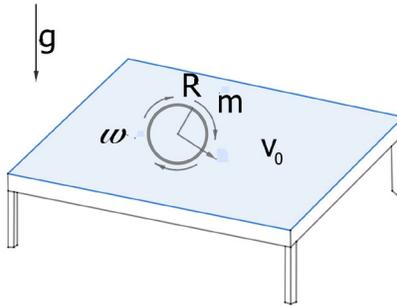


Figura 16

20. Considera un alambre con forma de S (Fig. 17) que posee dos codos que se doblan suavemente en un ángulo $\pi/2$ cada uno. Por el alambre desliza una cuenta con velocidad inicial v_0 . Encuentra la velocidad final de la cuenta si el coeficiente de fricción entre ella y el alambre es μ . El movimiento ocurre en un plano horizontal de forma que la gravedad no juega un papel.

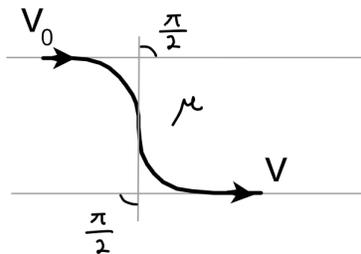


Figura 17

21. Un haz de luz se dispara desde el centro de un disco en dirección radial. El disco gira con velocidad ω (Fig. 18). Un observador que gira con el disco determinará que la luz no se mueve en línea recta, ¿qué trayectoria seguirá la luz para este observador?

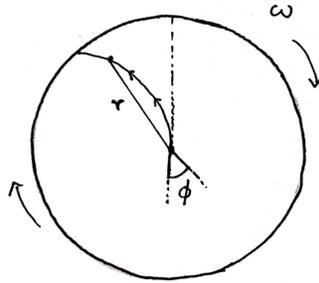


Figura 18

22. Se tiene un recipiente cilíndrico con un pequeño agujero en el fondo, se pone líquido en él y se revuelve un poco de tal forma que se forma un remolino mientras se drena. Considera que el remolino es axialmente simétrico y haz las aproximaciones necesarias (Fig. 19). (a) Encuentra el perfil (la forma) de la superficie del líquido en el recipiente. (b) Si el líquido en el remolino contenido tiene el volumen V encuentra la altura h del remolino en la orilla del recipiente si su radio es a y el agujero tiene radio b .

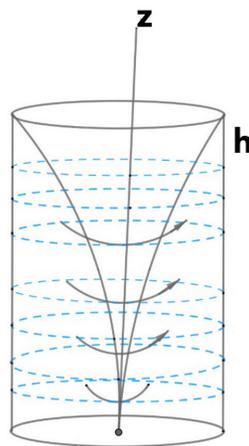


Figura 19

23. Una masa M está suspendida verticalmente de un elástico con constante de Hooke k y masa m . Una aproximación (no tan mala en este caso) es considerar que la densidad lineal del elástico siempre es uniforme. Calcula la frecuencia de las oscilaciones de la masa M .

24. Un cometa que orbita el Sol tiene parámetro de impacto b y velocidad en el infinito v_0 (Fig. 20). Calcula (a) la velocidad máxima del cometa v_{max} (b) su distancia mínima r_{min} al Sol. Toma la masa del Sol como M .

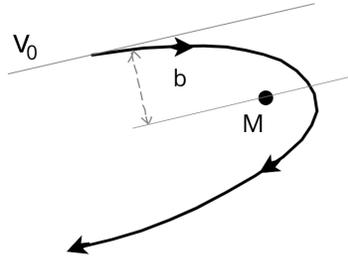


Figura 20

25. Una cuerda homogénea de peso W cuelga del techo de sus dos extremos en puntos A y B muy cercanos como se muestra en la figura. La cuerda se encuentra unida al techo mediante una argolla en A , la cual rompe cuando se somete a la tensión mayor o igual a F . En un momento se suelta la cuerda del extremo B mientras el A permanece unido (Fig.21). Encuentra el valor mínimo necesario de F para que la argolla no se rompa.

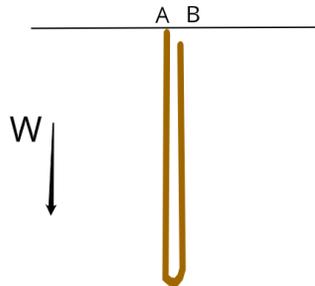


Figura 21

26. Estás en un cuarto vacío y solamente tienes a tu disposición un pizarrón, gis (tiza) y una cinta métrica. Explica cómo calcular la distancia entre tus pupilas.
27. Dos burbujas de jabón están pegadas de radios $r_1 > r_2$ (Fig. 22). (a) Encuentra el radio de curvatura ρ de la superficie que forma la interfaz entre ellas. (b) considera ahora que $r_1 = r_2 = r$, las burbujas pegadas de pronto se fusionan en una sola burbuja. Encuentra el radio R de esta nueva burbuja. Asume que la presión debida a la tensión superficial de las burbujas es mucho menor que la presión atmosférica, de modo que no es necesario considerar cambios en el volumen del aire dentro de las burbujas. Usa la fórmula para el volumen de un domo esférico:

$$V(r, h) = \frac{\pi}{3}(2r^3 - 3r^2h + h^3)$$

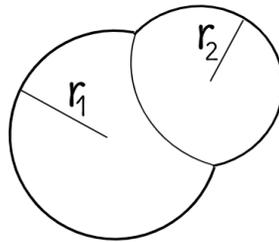


Figura 22

28. Una cicloide se genera por un punto sobre una circunferencia de radio R en el plano xy que rueda sin deslizar por el eje x . El punto toca el eje x en A y alcanza su punto más alto en B opuesto a E (Fig. 23). Calcula el radio de curvatura ρ de la cicloide en el punto D de la cicloide cuya coordenada x se encuentra en el punto C que bisecta AE (es posible hacerlo mediante cinemática).

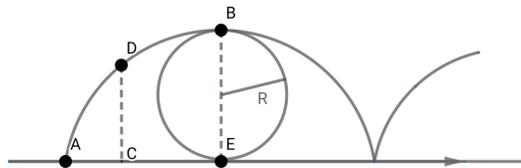


Figura 23

29. De forma similar al problema anterior, considera una epicicloide, la curva generada por un punto fijo de una circunferencia de radio r que rueda sin deslizar sobre una circunferencia de radio R y centro O . Calcula (es posible hacerlo mediante cinemática) el radio de curvatura ρ en el punto Q , el más lejano a O de la epicicloide (Fig. 24).

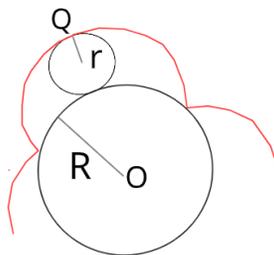


Figura 24

30. Una varita homogénea y delgada de longitud L tiene un pivote en el centro y puede girar libremente sin fricción. Inicialmente la varita se encuentra en equilibrio en posición horizontal cuando una araña aterriza al tiempo $t = 0$ en el punto medio entre el centro y un extremo con velocidad vertical v_0 (Fig. 25). Al momento de aterrizar la araña comienza a correr hacia la orilla más cercana de tal manera que la velocidad angular ω_0 de la varita se mantiene constante. La masa de la araña es la mitad de la masa de la varita. (a) Encuentra ω_0 (b) Encuentra la velocidad $u(t)$ con la que debe correr la araña para que la velocidad angular sea constante. (c) Encuentra v_0 para que cuando la araña llegue al final de la varita ésta se encuentre en posición vertical.

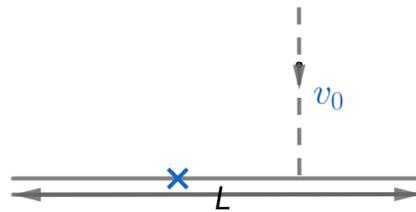


Figura 25

31. Una partícula se lanza desde el suelo en tiro parabólico de manera que pasa rozando la superficie superior de una esfera de radio R que descansa en el suelo (Fig. 26). (a) Encuentra la velocidad mínima de lanzamiento u (b) Encuentra el ángulo de lanzamiento θ respecto a la horizontal que le corresponde.

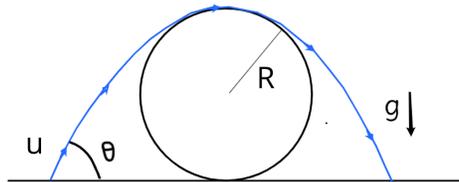


Figura 26

32. Desde la base de un plano inclinado un ángulo β con el horizonte se lanza en tiro parabólico una esferita. Encuentra el ángulo α de lanzamiento, respecto a la horizontal, para que la esferita impacte en el punto del plano inclinado lo más lejos posible de donde partió (Fig. 27).

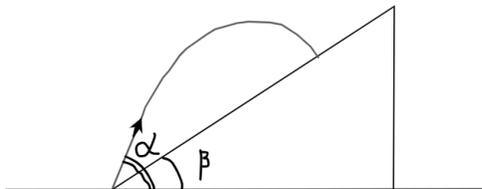


Figura 27

33. Un satélite de masa m se encuentra en la atmósfera donde está sometido a una fuerza de resistencia del aire $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, la resistencia del aire lo frena de manera que terminará estrellándose contra la Tierra. Originalmente orbita a una altura sobre la superficie igual a la mitad del radio terrestre y que la caída del satélite ocurre lentamente. ¿Cuántas vueltas dará a la tierra el satélite antes de impactarse?

34. Un cilindro de radio R que rueda sin deslizar impacta contra un borde que se encuentra a la altura h (Fig. 28). Encuentra el valor máximo de h para que el cilindro aún libre el borde cuando (a) durante el choque no hay fricción entre el cilindro y el borde. (b) durante el choque no hay deslizamiento entre el cilindro y el borde. En ambos casos una vez que el cilindro hace contacto con el borde considera que durante su ascenso no pierde contacto.

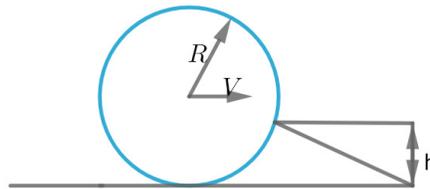


Figura 28

35. Una fuente F se mueve a la velocidad v mientras emite sonido con longitud de onda λ , siendo u la velocidad del sonido y $v < u$. La distancia de la fuente F al receptor A es L y el ángulo entre FA y la velocidad de F es ϕ (Fig. 29). Encuentra la frecuencia aparente f' que recibe A .

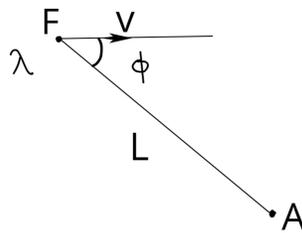


Figura 29

36. Un barco está en un amarradero atado mediante una soga que se encuentra enrollada en un bolardo (poste de baja altura) un ángulo ϕ . Del extremo libre de la soga tira un marinero que puede ejercer una fuerza máxima f .

El coeficiente de fricción entre la soga y el bolardo es μ (Fig. 30). ¿Cuál es la fuerza máxima F con la que podría tirar el barco tal que el marinero aún pueda detenerlo con la soga?

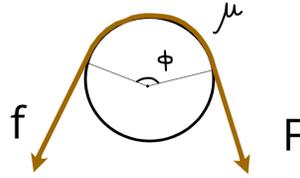


Figura 30

37. Hay un recipiente de paredes delgadas con forma de pirámide sin base que descansa sobre una mesa. En la punta de la pirámide hay un agujerito pequeño por el cual se vierte agua lentamente (Fig. 31). Justo en el momento en que el recipiente se llena por completo de agua ésta empieza a escapar por abajo del recipiente. Cuando el recipiente está lleno de agua el peso del agua que contiene es W . Calcula el peso W_0 del recipiente.

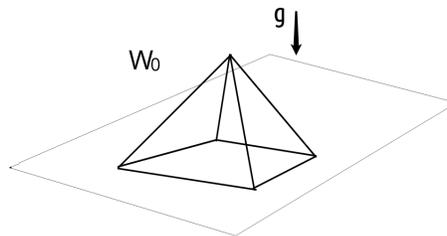


Figura 31

38. Dos balsas se encuentran a la deriva en un lago, inicialmente parten del mismo punto y comienzan a alejarse de forma que sus velocidades hacen un ángulo de $\pi/3$. La velocidad de una balsa es siempre el doble de la velocidad de la otra, ambas velocidades son constantes en magnitud y dirección. Sobre cada balsa hay un reloj de manecillas donde el segundero mide $\ell = 10 \text{ cm}$, los relojes son idénticos. En cada instante de tiempo siempre es posible orientar cada reloj de manera que las puntas de los segunderos estén en reposo relativo (Fig. 32). (a) ¿Cuál es la velocidad de cada balsa? (b) Calcula la distancia entre las balsas al cabo de dos días.

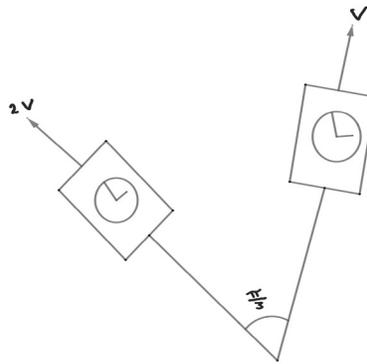


Figura 32

39. ¿Con qué punto P de una varilla larga y homogénea hay que dar un golpe para que si la tomamos de un extremo no sintamos el rebote? (Fig. 33)

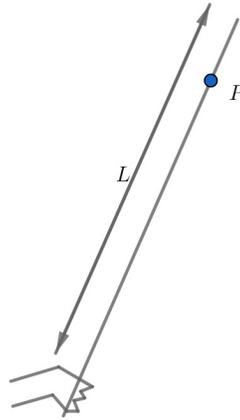


Figura 33

40. Una cuenta se desliza desde un punto Q sin fricción por un alambre que está inclinado un ángulo β respecto a la vertical y llega por el alambre hasta algún punto P de un plano inclinado en ángulo α respecto a la horizontal. ¿Qué ángulo β debe escogerse para que el tiempo de Q hasta el plano sea mínimo? (Fig. 34) Considera que el alambre siempre es suficientemente largo como para ir desde Q hasta tocar el plano.

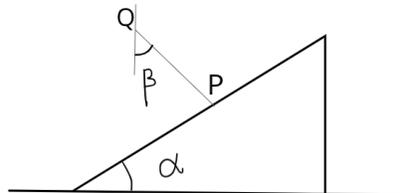


Figura 34

41. Una fuerza F se aplica de manera horizontal al centro de un cilindro hueco de peso W y radio R el cual descansa en el suelo contra un escalón de altura $h < R$ (Fig. 35). ¿Cuál es el valor mínimo de F tal que el cilindro librerá el escalón?

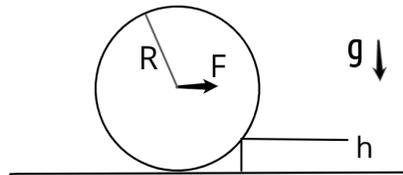


Figura 35

42. Se tienen n cuentas idénticas que deslizan sin fricción por un alambre vertical y caen por su propio peso. A cada cuenta se le comunica inicialmente una velocidad v_i , $i = 1, 2, \dots, n$ que puede estar dirigida hacia arriba o hacia abajo del alambre, las velocidades v_i pueden en principio ser todas diferentes en magnitud. Los choques entre las cuentas son totalmente elásticos (Fig. 36). (a) Calcula el número máximo de choques N que es posible entre las cuentas (b) Si la velocidad inicial promedio de las cuentas es v al tiempo $t = 0$ encuentra el tiempo necesario t para que la energía cinética de las cuentas vuelva a ser la inicial. (c) Si las n cuentas tienen inicialmente todas velocidades hacia abajo u_i y se encuentran equiespaciadas a la distancia d . Encuentra valores para cada u_i de forma que todas las cuentas se encuentren al tiempo t .

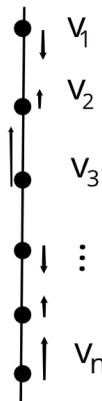


Figura 36

SOLUCIONES

1. Las hormigas siempre se encuentran en los vértices de un pentágono regular. Pasando al sistema de reposo de alguna de ellas se encuentra que la velocidad con que decrece la arista entre dos vecinas es constante e igual a $u(1 - \cos(2\pi/5))$. De aquí resulta $\tau = \frac{a}{u} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Otra forma consiste en descomponer el movimiento de cada hormiga de forma instantánea en una rotación respecto al centro del pentágono y un escalamiento del pentágono (velocidad radial), usando este método es posible también demostrar que las hormigas se mueven siguiendo una espiral logarítmica.

2. En ambos casos la trayectoria del centro de masas es la misma. La esfera nunca puede tener contacto en más de dos puntos, pero siempre al menos en uno. En ambos casos la conservación del momento angular respecto al punto de cada impacto permite hallar la relación entre las velocidades del centro de masas antes y después de cada impacto. (a) En este caso la esfera nunca gira al caer, la ley de conservación de la energía nos dice $\frac{1}{2}mv_{\infty}^2(1 - \cos^2\varphi) = mga$ con $\varphi \approx \sqrt{2a/R}$. Resulta $v_{\infty} = R\sqrt{g/a}$ (b) En este caso la esfera va girando al caer y se debe considerar la energía cinética de rotación, si $v_{\infty} = \omega_i R$ tenemos $\frac{1}{2}I(\omega_i^2 - \omega_f^2) = mga$, donde $I = \frac{7}{5}mR^2$. La conservación del momento angular implica $I\omega_f \approx I\omega_i - m\omega_i a^2$ de aquí resulta $v_{\infty} = R\sqrt{g/a}$. En el caso (b) las fuerzas de fricción no realizan trabajo, por esto el resultado es el mismo para v_{∞} .

3. La conservación del momento angular no puede aplicarse respecto al clavo a pesar de que su radio sea muy pequeño; el punto de contacto del hilo con el clavo gira. Las fuerzas de ligadura no realizan trabajo, por tanto la velocidad de la masa es constante. El movimiento puede considerarse como una serie de movimientos circulares instantáneos respecto al radio de giro L que varía con el tiempo. Como se aprecia en la figura $dL = -rd\varphi$, y en cada instante $v_0 dt = Ld\varphi$, resulta $\tau = \int_L^{L/2} \frac{dt}{dL} dL = \frac{3L^2}{8rv_n}$.

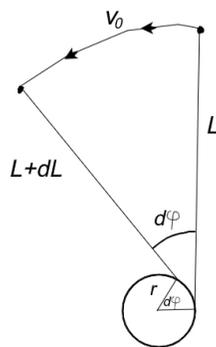


Figura 37

4. El cambio de momento tangencial a la pared es $-\mu$ veces el cambio de momento normal a la pared. $\beta = \text{arccot}(\cot\alpha - 2\mu)$ si $\mu \leq \cot\alpha/2$, $\beta = \pi/2$ si $\mu > \cot\alpha/2$.

5. La condición de equilibrio estático implica (a) $N = \frac{W}{2} \sec(\alpha/2)$. (b) Aquí hay que usar las ecuaciones de movimiento para cuerpo rígido. La aceleración angular resulta $\dot{\omega} = \frac{3g}{5R} \sin(\alpha/2)$, y la fuerza de fricción $f = \frac{2}{5} W \sin(\alpha/2)$, de esto resulta $N = W \cos(\alpha/2)$. (c) En este caso la aceleración del centro de masas de la esfera es $a = g \sin(\alpha/2)$, resulta $N = W \cos(\alpha/2)$.

6. (a) $F_{max} = 3W$. (b) $f(t) = \frac{3gt^2}{8L} W$ para $0 \leq t \leq 2\sqrt{L/g}$, $f(t) = \frac{3}{2} W$ para $t > 2\sqrt{L/g}$. (c) $f(t) = W \frac{ut}{L}$ para $0 \leq t \leq L/u$, $f(t) = W$ para $t > L/g$. (d) La tensión en cada caso es: $T_{(a)} = 0$, $T_{(b)} = W/2$, $T_{(c)} = W/3$.

7.(a) $P(\theta) = \rho g R(1 - \cos\theta) + \rho \frac{(R\omega \sin\theta)^2}{2}$ (b) La presión máxima $P_{max} = \rho \frac{(g + \omega^2 R)^2}{2\omega^2}$ ocurre en $\theta_0 = \pi - \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$ si $g \leq \omega^2 R$, y $P_{max} = 2\rho g R$ en $\theta_0 = \pi$ si $g > \omega^2 R$.

8. El proyectil se mueve en una elipse muy excéntrica de semieje mayor $a = 2R$, usando las tres leyes de Kepler: $\tau = \sqrt{8R/g} \left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \approx 3 \text{ hrs } 45 \text{ min}$.

9. Es útil analizar los casos n par o impar, considerando el movimiento como un tiro parabólico sobre la superficie del plano inclinado donde hay una componente paralela a la superficie y una perpendicular de la aceleración de la 'gravedad'. La condición entonces para que se formen trayectorias cerradas y reversibles en ambos casos es: $\alpha = \arctan\left(1/\sqrt{n + (-1)^n}\right)$.

10. El contacto se pierde cuando la velocidad y aceleración relativa del bloque y la punta de la barra se anulan. (a) $M/m = 4/3$. (b) $v = \frac{1}{4}\sqrt{3gL}$.

11. El movimiento de la partícula es análogo al del un sistema planetario en una elipse muy excéntrica. De las leyes de Kepler $\tau = \sqrt{2m\epsilon_0} (\pi z)^{3/2} / q$.

12. Si $\xi = m/M$ habrá un segundo choque siempre que exista solución a la ecuación trascendental $\text{sen}\varphi + \xi\varphi = 0$. Aproximadamente $\xi \leq \frac{2}{3\pi} \approx 0.21$.

13. Para el equilibrio $\frac{GM}{b} = \frac{GM}{a} + \frac{\omega^2 a^2}{2}$. Resulta $f = \frac{3\omega^2}{8\pi G\rho} \approx 1.8 \times 10^{-3}$ (En realidad esta aproximación es incorrecta por un factor $5/2$ debido a la suposición dada para simplificar. I. Newton calculó por primera vez el resultado correcto.)

14. $\mu = \frac{4h}{(4-\pi)\ell}$.

15. $h = 2R/3$ arriba de su centro.

16. $\tau = \sqrt{L/g \ln N}$.

17. Solución 1: Considera el diagrama I: (a) Al tiempo t sea $OA = h = \frac{1}{2}gt^2$ la componente de la gravedad que acelera las cuentas nos dice que la curva obedece $d(\theta) = h \cos \theta$ (esto ya implica que $\angle OBA = \pi/2$). Esta curva es una circunferencia de diámetro h , pues como se ve en el diagrama I: $\cos \theta = y/d = d/h$, luego $d^2 = hy = x^2 + y^2$. Que resulta en $x^2 + (y - h/2)^2 = (h/2)^2$.

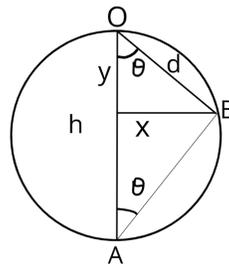


Diagrama I

Solución 2: Considera el diagrama II: $OA = h$, $OB = h \cos \theta$ (esto ya implica que $\angle OBA = \pi/2$). Sea C el punto en OA tal que CB bisecta $\angle OBA$ entonces $\angle OBC = \theta$ y OBC es isósceles. También ABC es isósceles. Entonces $OC = CA = CB = h/2$, por esto todo punto B equidista de C .

(b) En este caso la curva ya no es una cónica: $x^2 + (y - h/2)^2 = (h/2)^2 + ut\sqrt{x^2 + y^2}$, sino una limaçon (caracol) de Pascal, en coordenadas polares: $r(\phi) = ut - \frac{1}{2}gt^2 \text{sen} \phi$

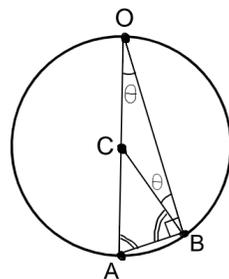


Diagrama II

18. (a) $u = v(\tan 2\alpha \cos \alpha - \text{sen} \alpha)/2$. (b) $0 < \alpha < \pi/4$.

19. Se debe analizar la fuerza de fricción sobre todo el anillo. (a) La trayectoria es una línea recta en la misma dirección que \vec{v}_0 . (b) Recorre más distancia cuando va girando.

20. $v = v_0 e^{-\mu\pi}$.

21. Es una espiral de Arquímedes $r(\phi) = \frac{c}{\omega} \phi$.

22. (a) $z(r) = z_0 - \frac{c}{r^2}$.

(b) Siendo $\gamma = (b/a)^2$

$$h = \frac{V}{\pi a^2} \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma(1 - \ln \gamma)}$$

23. $\omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{4}}}$.

24. (a) $v_{max} = (GM + \sqrt{G^2 M^2 + v_0^4 b^2}) / v_0 b$.

(b) $r_{min} = (\sqrt{G^2 M^2 + v_0^4 b^2} - GM) / v_0^2$.

25. $F \geq 2W$.

26. Por supuesto hay muchas formas diferentes. Una simple es medir el cambio aparente de la posición angular de la tiza cerrando un ojo y luego el otro haciendo marcas en el pizarrón. Las distancias se miden con la cinta.

27. (a) $\rho = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$. (b) $R = \sqrt[3]{\frac{27}{32}} r$.

28. Invariancia de la aceleración pasando al sistema donde el centro del círculo está en reposo resulta en $\rho = 2R$.

29. Pasamos al sistema O' de reposo del centro de la circunferencia de radio r . En este caso la aceleración $a = \frac{u^2}{\rho}$ tiene tres contribuciones en ese sistema la centrípeta, la del potencial centrífugo y la de Coriolis: $a = \omega^2 r + \Omega^2 (R + 2r) + 2\omega r \Omega$, respectivamente, donde Ω es la velocidad angular del centro de la circunferencia de radio r alrededor de la de radio R y ω es la velocidad angular de rotación de la circunferencia de radio r . La condición de rodamiento sin deslizamiento es $\omega r = \Omega R$. $u = \omega r + \Omega (R + 2r)$ es la velocidad del punto generador en el sistema O' .

Resulta:

$$\rho = 4r \left(\frac{R+r}{R+2r} \right).$$

30. (a) $\omega_0 = \frac{24}{11} \frac{v_0}{L}$. (b) $u(t) = \frac{g}{\omega_n} \cos \omega_0 t$. (c) $v_0 = \frac{11}{12} \sqrt{gL}$.

31. (a) En el punto más alto la aceleración centrípeta es $u_x^2/R = g$, usando conservación de la energía, $u = \sqrt{5gR}$. (b) $\theta = \arctan(2) \approx 63.4^\circ$.

32. Notemos que la distancia es proporcional a la coordenada x del punto de impacto, el cual está en intersección de la parábola y la recta

$$x(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} (\operatorname{sen}(2\alpha) - 2\tan\beta\cos^2\alpha)$$

por tanto $\cotan(2\alpha) + \tan\beta = 0$, de donde se obtiene $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$.

$$33. n \approx \frac{m\sqrt{g/R}}{6\pi\alpha} (1 - (2/3)^{3/2})$$

$$34. (a) h_{max} = R. (b) h_{max} = \frac{3}{2}R.$$

35. La frecuencia es el inverso de la diferencia de tiempo de viaje de dos frentes de onda consecutivos:

$$f' = f \left(1 - \frac{L - \sqrt{L^2 + (vT)^2} - 2LvT\cos\phi}{uT} \right)^{-1}, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c}$$

$$36. F = f e^{\mu\phi}.$$

37. La fuerza normal sobre la mesa es $W + W_0$, esta es también la fuerza de presión del líquido sobre la base, para una pirámide es $3W$. Por tanto $W_0 = 2W$.

38. De la hodógrafa se ve la condición para que solamente exista una posición relativa de los relojes. La velocidad relativa entre los relojes es $w = \sqrt{3}v$, y debe ser igual además a $w = 2u$ donde $u = 2\pi\ell/T$ es la velocidad de la punta del segundero y $T = 1 \text{ min}$. Además $d = wT_0$ donde $T_0 = 48 \text{ hrs}$

$$(a) v \approx 1.2 \text{ cm/s}, 2v \approx 2.4 \text{ cm/s}. (b) d \approx 3.6 \text{ km}.$$

39. A la distancia $2L/3$ del extremo en que se agarra.

40. Usando el resultado del problema 17 se tiene $\beta = \alpha/2$.

41. Una vez que el cilindro comienza a moverse con una fuerza aplicada librará el escalón. $F_{min} = W \frac{\sqrt{(2R-h)h}}{R-h}$.

42. (a) Primeramente pasamos a un sistema de caída libre O' donde las velocidades de cada cuenta son constantes, luego consideremos otro sistema O'' de referencia en movimiento uniforme relativo a O' tal que en O'' todas las cuentas tengan velocidad en una sola dirección, simplemente de diferentes magnitudes. A continuación observemos que cuando dos cuentas idénticas chocan sus velocidades simplemente se intercambian después del choque. Resulta $N(n) = \frac{n(n-1)}{2}$. (b) $t = 2v/g$. Claramente para que dicho evento ocurra se requiere $v > 0$. (c) Enumerando a las velocidades como v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , de manera que $v_0 = 0$ sea la velocidad de la cuenta más abajo, una elección posible (no es la única) es $v_k = kd/t$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$.